Научная статья
УДК 517.929.4
DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-3-95-124

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА И МОДЕЛЬ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ХОПФИЛДА

Мария Александровна Скворцова

Новосибирский государственный университет,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
Новосибирск, Россия

sm-18-nsu@yandex.ru; https://orcid.org/0000-0002-3528-7262

Аннотация

В работе рассмотрена модель нейронной сети Хопфилда, описываемая системой дифференциальных уравнений нейтрального типа с несколькими запаздываниями. Используя метод функционалов Ляпунова – Красовского, указаны условия на параметры модели, гарантирующие экспоненциальную устойчивость стационарного решения рассматриваемой системы. При этих условиях получены оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности.

Ключевые слова и фразы

дифференциальные уравнения нейтрального типа, модель нейронной сети Хопфилда, функционал Ляпунова – Красовского, оценки решений, экспоненциальная устойчивость.

Источник финансирования

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00367, https://rscf.ru/project/24-21-00367/

Для цитирования

Скворцова М. А. Системы уравнений нейтрального типа и модель нейронной сети Хопфилда // *Математические труды*, 2025, Т. 28, № 3, С. 95-124. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-3-95-124

Systems of neutral type equations and the Hopfield neural network model

Maria A. Skvortsova

Novosibirsk State University, Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia

sm-18-nsu@yandex.ru; https://orcid.org/0000-0002-3528-7262

Abstract

In the paper, we consider the Hopfield neural network model described by a system of neutral type differential equations with several delays. Using the Lyapunov–Krasovskii functionals method, conditions are specified for the model parameters that guarantee exponential stability of the stationary solution to the considered system. Under these conditions, estimates are obtained that characterize the stabilization rate of solutions at infinity.

Keywords

neutral type differential equations, Hopfield neural network model, Lyapunov–Krasovskii functional, estimates for solutions, exponential stability.

Funding

The research is supported by the Russian Science Foundation (grant no. 24-21-00367), https://rscf.ru/project/24-21-00367/

For citation

Skvortsova M. A. Systems of neutral type equations and the Hopfield neural network model // *Mat. Trudy*, 2025, T. 28, № 3, C. 95-124. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-3-95-124

Посвящается моему научному руководителю профессору
Демиденко Геннадию Владимировичу

§ 1. Введение и постановка задачи

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений нейтрального типа следующего вида:

$$\frac{d}{dt}x_i(t) = -a_i^0 x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} g_j(x_j(t-\tau_{ij}(t)))$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \frac{d}{dt} x_j(t-\xi_{ij}(t)) + u_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad t > 0. \tag{1.1}$$

Здесь $\tau_{ij}(t),\ \xi_{ij}(t) \in C^1([0,\infty))$, $i,j = 1,\ldots,n$, — функции запаздывания, удовлетворяющие условиям

$$0 \le \tau_{ij}(t) \le \tau_{ij}, \quad \frac{d}{dt}\tau_{ij}(t) \le \bar{\tau}_{ij} < 1, \quad i,j = 1,\ldots,n, \quad t \ge 0, \tag{1.2}$$

$$0 < \xi_{ij}(t) \le \xi_{ij}, \quad \frac{d}{dt}\xi_{ij}(t) \le \bar{\xi}_{ij} < 1, \quad i,j = 1,\ldots,n, \quad t \ge 0, \tag{1.3}$$

где τ_{ij}, $\bar{\tau}_{ij}$, ξ_{ij}, $\bar{\xi}_{ij}$ — постоянные. Функции $f_j(x),\ g_j(x) \in C(\mathbb{R})$, $j = 1,\ldots,n$, предполагаются липшицевыми, т. е.

$$|f_j(x) - f_j(y)| \le \mu_j |x - y|, \quad j = 1,\ldots,n, \quad x,y \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

$$|g_j(x) - g_j(y)| \le \nu_j |x - y|, \quad j = 1,\ldots,n, \quad x,y \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

где μ_j, ν_j — константы. Остальные параметры системы a_i^0, a_{ij}, b_{ij} c_{ij}, u_i, $i,j = 1,\ldots,n$, также предполагаются постоянными.

При $\tau_{ij} \equiv \tau$, $\bar{\tau}_{ij} \equiv \bar{\tau}$, $\xi_{ij} \equiv \xi$, $\bar{\xi}_{ij} \equiv \bar{\xi}$ система (1.1) рассматривалась в работе [1] как модель нейронной сети Хопфилда, в которой неизвестные функции $x_i(t)$, $i = 1,\ldots,n$, отвечают за состояние i-го нейрона в момент времени t.

Отметим, что, в литературе имеются различные модели нейронной сети Хопфилда, которые основаны на классической модели, предложенной Дж.Дж. Хопфилдом в работах [2], [3]. В частности, при описании моделей используются системы дифференциальных уравнений нейтрального типа (см., например, [1], [4], [5], [6], [7]). В статьях [1], [4], [5], [6], [7] изучалась устойчивость решений систем нейтрального типа, в [1] помимо исследования устойчивости также рассматривался вопрос о получении оценок скорости стабилизации решений на бесконечности.

В настоящей работе будут найдены условия на параметры модели (1.1), гарантирующие экспоненциальную устойчивость стационарного решения, и получены оценки, характеризующие скорость стабилизации решений системы (1.1) на бесконечности. В том числе, будут уточнены некоторые результаты из работ [1], [4], [5], [6], [7].

Мы будем использовать метод функционалов Ляпунова – Красовского [8], который при подходящем выборе функционала может быть применен для получения оценок решений систем запаздывающего типа (см., например, [9], [10], [11], [12], [13], [14]), а также систем нейтрального типа (см., например, [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24]). В нашей работе мы будем опираться на результаты работы [21], в которой рассматривалась система дифференциальных уравнений нейтрального типа с несколькими запаздываниями

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \sum_{j=1}^{m} B_j(t)y(t-\tau_j) + \sum_{j=1}^{m} C_j(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau_j), \quad t > 0,$$

где $A(t),\ B_j(t),\ C_j(t) \in C([0,\infty))$ — квадратные матрицы с непрерывными T-периодическими элементами, т. е.

$$A(t+T) \equiv A(t), \quad B_j(t+T) \equiv B_j(t), \quad C_j(t+T) \equiv C_j(t),$$

$\tau_j > 0,\ j = 1,\dots,m$. При исследовании асимптотического поведения решений данной системы в [21] использовался функционал Ляпунова – Красовского

$$\langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t-\tau_j}^{t} \langle K_j(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds$$

$$+\sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t-\tau_j}^{t} \left\langle L_j(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds \tag{1.6}$$

с матрицами $H(t) \in C^1([0,T]),\ K_j(s),\ L_j(s) \in C^1([0,\tau_j])$ такими, что

$$H(t+T) \equiv H(t), \quad H(t) = H^*(t) > 0,$$

$$K_j(s) = K_j^*(s) \ge 0, \quad L_j(s) = L_j^*(s) \ge 0, \quad j = 1,\dots,m.$$

При изучении системы (1.1) мы также будем использовать функционал вида (1.6).

§ 2. Результаты для линейной модели с постоянными запаздываниями

Вначале рассмотрим случай, когда функции $f_j(x),\ g_j(x),\ j = 1,\dots,n$, являются линейными:

$$f_j(x) = x, \quad g_j(x) = x, \quad j = 1,\dots,n,$$

а параметры запаздывания $\tau_{ij}(t),\ \xi_{ij}(t),\ i,j = 1,\dots,n,$ — постоянными:

$$\tau_{ij}(t) \equiv \tau_{ij}, \quad \xi_{ij}(t) \equiv \xi_{ij}, \quad i,j = 1,\dots,n.$$

Предположим, что у системы (1.1) существует единственное стационарное решение $x^* = (x_1^*,\dots,x_n^*)$, т. е. система линейных алгебраических уравнений

$$0 = -a_i^0 x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j + u_i, \quad i = 1,\dots,n,$$

однозначно разрешима. Это условие эквивалентно тому, что

$$\det(A_0 - A - B) \ne 0,$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_1^0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_n^0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ниже будут указаны условия на коэффициенты a_i^0, a_{ij}, b_{ij}, $i, j = 1, \dots, n$, при которых это условие гарантированно выполняется.

С помощью замены

$$y_i(t) = x_i(t) - x_i^*, \quad i = 1, \dots, n,$$

система (1.1) приводится к виду

$$\frac{d}{dt} y_i(t) = -a_i^0 y_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j(t - \tau_{ij}) + \sum_{j=1}^n c_{ij} \frac{d}{dt} y_j(t - \xi_{ij}), \quad i = 1, \dots, n, \quad t > 0. \tag{2.1}$$

Для этой системы рассмотрим начальную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} y_i(t) = -a_i^0 y_i(t) + \displaystyle\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} y_j(t - \tau_{ij}) \\ \qquad + \displaystyle\sum_{j=1}^n c_{ij} \frac{d}{dt} y_j(t - \xi_{ij}), \quad i = 1, \dots, n, \quad t > 0, \\ y_i(t) = \varphi_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in [-\mathcal{T}_{\max}, 0], \\ y_i(+0) = \varphi_i(0), \quad i = 1, \dots, n, \end{cases} \tag{2.2}$$

где

$$\mathcal{T}_{\max} = \max_{i,j=1,\dots,n} \{\tau_{ij}, \xi_{ij}\},$$

$\varphi_i(t) \in C^1([-\mathcal{T}_{\max}, 0])$, $i = 1, \dots, n$, — заданные функции, которые удовлетворяют системе (2.1) при $t = 0$, т. е.

$$\frac{d}{dt} \varphi_i(0) = -a_i^0 \varphi_i(0) + \sum_{j=1}^n a_{ij} \varphi_j(0) + \sum_{j=1}^n b_{ij} \varphi_j(-\tau_{ij}) + \sum_{j=1}^n c_{ij} \frac{d}{dt} \varphi_j(-\xi_{ij}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Поскольку в силу условия (1.3) выполнено неравенство $\min\limits_{i,j=1,\dots,n} \xi_{ij} > 0$, то последнее условие гарантирует непрерывную дифференцируемость решения при $t > 0$: $y_i(t) \in C^1([0,\infty))$, $i = 1,\dots,n$. Всюду далее будем предполагать, что данное условие выполняется.

Вначале сформулируем результат об экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (2.1).

Теорема 1. *Предположим, что*

$$a_i^0 > 0, \quad i = 1,\dots,n, \tag{2.3}$$

и существуют величины $l_{ij} > 0$, $i,j = 1,\dots,n$, такие, что выполнены неравенства

$$l_{jr} - \left(\sum_{i=1}^n l_{ij}\right)\left(\sum_{s=1}^n |c_{js}|\right)|c_{jr}| > 0, \quad j,r = 1,\dots,n, \tag{2.4}$$

$$\sum_{j=1}^n \Bigg[l_{jq}(a_q^0)^2 - \left(\sum_{i=1}^n l_{ij}\right)\left(\sum_{s=1}^n (|a_{js}| + |b_{js}|)\right)(|a_{jq}| + |b_{jq}|)$$
$$\times \left(1 + \sum_{r=1}^n \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^n l_{ij}\right)|c_{jr}|^2}{\left(l_{jr} - \left(\sum\limits_{i=1}^n l_{ij}\right)\left(\sum\limits_{s=1}^n |c_{js}|\right)|c_{jr}|\right)}\right)\Bigg] > 0, \quad q = 1,\dots,n. \tag{2.5}$$

Тогда нулевое решение системы (2.1) *экспоненциально устойчиво.*

Теорема 1 будет доказана в следующем параграфе.

Нетрудно видеть, что, выбирая подходящим образом величины $l_{ij} > 0$, $i,j = 1,\dots,n$, можно получать различные условия на коэффициенты системы (2.1), гарантирующие экспоненциальную устойчивость нулевого решения. Приведем один из вариантов.

Следствие 1. *Предположим, что выполнены неравенства*

$$a_i^0 > 0, \quad i = 1,\dots,n,$$

$$1 - n\left(\sum_{s=1}^n |c_{js}|\right)|c_{jr}| > 0, \quad j,r = 1,\dots,n,$$

$$(a_q^0)^2 - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{s=1}^n (|a_{js}| + |b_{js}|)\right)(|a_{jq}| + |b_{jq}|)$$
$$\times \left(1 + \sum_{r=1}^n \frac{n|c_{jr}|^2}{\left(1 - n\left(\sum\limits_{s=1}^n |c_{js}|\right)|c_{jr}|\right)}\right) > 0, \quad q = 1,\dots,n.$$

Тогда нулевое решение системы (2.1) *экспоненциально устойчиво.*

Данное утверждение вытекает из теоремы 1, если положить

$$l_{ij} = 1, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Теперь рассмотрим несколько частных случаев. Пусть сначала $n = 1$. Тогда система (2.1) переходит в скалярное уравнение

$$\frac{d}{dt} y(t) = -a_0 y(t) + b y(t-\tau) + c \frac{d}{dt} y(t-\xi), \quad t > 0. \tag{2.6}$$

Следствие 1 переходит в следующее утверждение.

Следствие 2. *Предположим, что выполнены неравенства*

$$a_0 > 0, \quad |c| < 1, \quad (a_0)^2 - \frac{|b|^2}{(1-|c|^2)} > 0. \tag{2.7}$$

Тогда нулевое решение уравнения (2.6) *экспоненциально устойчиво.*

Замечание 1. Отметим, что третье неравенство в формуле (2.7) является существенным. Действительно, пусть

$$a_0 > 0, \quad b > 0, \quad 0 < c < 1, \quad (a_0)^2 - \frac{|b|^2}{(1-|c|^2)} = 0. \tag{2.8}$$

Тогда при

$$\tau = \frac{\sqrt{1-c^2}}{a_0 c} \left(2\pi - \arcsin(c) \right), \quad \xi = \frac{\sqrt{1-c^2}}{a_0 c} \arccos(c)$$

одним из решений уравнения (2.6) является функция

$$y(t) = \sin\left(\frac{a_0 c}{\sqrt{1-c^2}} t \right),$$

которая не стремится к нулю при $t \to \infty$. Тем самым, нулевое решение уравнения (2.6) не является экспоненциально устойчивым.

Замечание 2. Как было отмечено выше, в статьях [1], [4], [5], [6], [7] также изучалась устойчивость нулевого решения определенных классов систем нейтрального типа, частным случаем которых является уравнение (2.6). Проведем сравнение результатов настоящей работы с результатами указанных статей применительно к уравнению (2.6).

1. Из утверждений, приведенных в работе [1], вытекает, что при выполнении условий (2.8) нулевое решение уравнения (2.6) будет экспоненциально устойчивым, что противоречит замечанию 1.

2. Полученные в работе [4] условия асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (2.6) при $\xi = \tau$ совпадают с условиями (2.7). Случай $\xi \neq \tau$ в работе [4] не рассматривался.

3. В работе [5] условия асимптотической устойчивости нулевого решения систем нейтрального типа сформулированы в терминах существования большого количества матриц и параметров, которые не выписаны в явном виде, из-за чего проверка условий представляет существенные трудности даже для скалярного уравнения (2.6).

4. Из результатов работ [6] и [7] вытекают следующие условия асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (2.6):

$$a_0 > 0, \quad |c| < \frac{1}{2}, \quad a_0 > \frac{|b|}{(1-2|c|)}.$$

По сравнению с этими условиями, условия (2.7) являются менее жесткими.

Пусть теперь $n = 2$. Рассмотрим одну из систем вида (2.1):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y_1(t) = -a_1^0 y_1(t) + b_{12} y_2(t-\tau_{12}), \quad t > 0, \\[2ex] \dfrac{d}{dt}y_2(t) = -a_2^0 y_2(t) + c_{21}\dfrac{d}{dt}y_1(t-\xi_{21}), \quad t > 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Следствие 3. *Предположим, что выполнены условия*

$$a_1^0 > 0, \quad a_2^0 > |b_{12}||c_{21}|. \tag{2.10}$$

Тогда нулевое решение системы (2.9) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. Проверим выполнение условий теоремы 1. Неравенства (2.3)–(2.5) примут вид:

$$\begin{cases} a_1^0 > 0, \quad a_2^0 > 0, \\[1ex] l_{11} > 0, \quad l_{12} > 0, \quad l_{21} - (l_{12}+l_{22})|c_{21}|^2 > 0, \quad l_{22} > 0, \\[1ex] (l_{11}+l_{21})(a_1^0)^2 > 0, \quad (l_{12}+l_{22})(a_2^0)^2 - (l_{11}+l_{21})|b_{12}|^2 > 0. \end{cases}$$

При $|b_{12}| > 0$ эти неравенства эквивалентны следующим:

$$\begin{cases} a_1^0 > 0, \quad a_2^0 > 0, \quad l_{11} > 0, \quad l_{12} > 0, \quad l_{21} > 0, \quad l_{22} > 0, \\[1ex] \dfrac{(a_2^0)^2}{|b_{12}|^2} > \dfrac{(l_{11}+l_{21})}{(l_{12}+l_{22})} > \dfrac{l_{21}}{(l_{12}+l_{22})} > |c_{21}|^2. \end{cases}$$

Тем самым, при выполнении условий (2.10) существуют величины l_{11}, l_{12}, l_{21}, $l_{22} > 0$, для которых выполнены неравенства (2.3)–(2.5). Тогда по теореме 1 нулевое решение системы (2.9) экспоненциально устойчиво.

Следствие доказано.

Теперь приведем результат об оценках решений начальной задачи (2.2).

Введем обозначения. Предположим, что выполнены условия теоремы 1. Выберем величины $\varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij} > 0$, $i,j = 1,\dots,n$, так, чтобы выполнялись неравенства

$$l_{jr} - \left(\sum_{i=1}^n l_{ij}\right)\left(\sum_{s=1}^n |\widetilde{c}_{js}|\right)|\widetilde{c}_{jr}| > 0, \quad j,r = 1,\dots,n, \tag{2.11}$$

$$\sigma_q = \sum_{j=1}^n \Bigg[l_{jq}(a_q^0)^2 - \left(\sum_{i=1}^n l_{ij}\right)\left(\sum_{s=1}^n |\widetilde{a}_{js}|\right)|\widetilde{a}_{jq}|$$

$$\times \left(1 + \sum_{r=1}^n \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^n l_{ij}\right)|\widetilde{c}_{jr}|^2}{\left(l_{jr} - \left(\sum\limits_{i=1}^n l_{ij}\right)\left(\sum\limits_{s=1}^n |\widetilde{c}_{js}|\right)|\widetilde{c}_{jr}|\right)}\right)\Bigg] > 0, \quad q = 1,\dots,n, \tag{2.12}$$

где

$$|\widetilde{a}_{jr}| = |a_{jr}| + |b_{jr}|e^{\varepsilon_1^{jr}\tau_{jr}/2}, \quad j,r = 1,\dots,n, \tag{2.13}$$

$$|\widetilde{c}_{jr}| = |c_{jr}|e^{\varepsilon_2^{jr}\xi_{jr}/2}, \quad j,r = 1,\dots,n. \tag{2.14}$$

Рассмотрим функционал Ляпунова – Красовского [21]

$$V(t,y) = V(t,y_1,\dots,y_n) = \sum_{i=1}^n h_i y_i^2(t) + \sum_{i,j=1}^n \int\limits_{t-\tau_{ij}}^t k_{ij} e^{-\varepsilon_1^{ij}(t-s)} y_j^2(s)\,ds$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n \int\limits_{t-\xi_{ij}}^t l_{ij} e^{-\varepsilon_2^{ij}(t-s)} \left(\frac{d}{ds}y_j(s)\right)^2 ds, \tag{2.15}$$

где

$$h_j = \sum_{i=1}^n l_{ij} a_j^0 > 0, \quad j = 1,\dots,n, \tag{2.16}$$

$$k_{jq} = \left(\sum_{i=1}^n l_{ij}\right)\left(\sum_{s=1}^n |\widetilde{a}_{js}|\right)\left(1 + \sum_{r=1}^n \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^n l_{ij}\right)|\widetilde{c}_{jr}|^2}{\left(l_{jr} - \left(\sum\limits_{i=1}^n l_{ij}\right)\left(\sum\limits_{s=1}^n |\widetilde{c}_{js}|\right)|\widetilde{c}_{jr}|\right)}\right)$$

$$\times |b_{jq}| e^{\varepsilon_1^{jq} \tau_{jq}/2} \geq 0, \quad j, q = 1, \dots, n, \tag{2.17}$$

$l_{ij} > 0$, $i, j = 1, \dots, n$, определены в теореме 1.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 1. Тогда для решения начальной задачи* (2.2) *справедливы оценки*

$$|y_i(t)| \leq \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_i}} e^{-\gamma t/2}, \quad i = 1, \dots, n, \quad t > 0, \tag{2.18}$$

где

$$\gamma = \min_{i,j=1,\dots,n} \left\{ \frac{\sigma_i}{h_i}, \varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij} \right\} > 0, \tag{2.19}$$

функционал $V(0,\varphi)$ *определен в* (2.15), *величины* h_i *определены в* (2.16), *величины* σ_i, ε_1^{ij} *и* ε_2^{ij} — *в* (2.11)–(2.14).

Теорема 2 будет доказана в следующем параграфе.

Сейчас приведем следствия из этой теоремы для $n = 1$ и $n = 2$.

Рассмотрим начальную задачу для уравнения (2.6):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} y(t) = -a_0 y(t) + b y(t-\tau) + c \dfrac{d}{dt} y(t-\xi), \quad t > 0, \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\max\{\tau, \xi\}, 0], \\ y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{2.20}$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\max\{\tau,\xi\}, 0])$ — заданная функция, удовлетворяющая условию

$$\frac{d}{dt}\varphi(0) = -a_0 \varphi(0) + b\varphi(-\tau) + c\frac{d}{dt}\varphi(-\xi).$$

Следствие 4. *Предположим, что выполнены условия* (2.7). *Тогда для решения начальной задачи* (2.20) *имеет место оценка*

$$|y(t)| \leq \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h}} e^{-\gamma t/2}, \quad t > 0,$$

где

$$V(0,\varphi) = h\varphi^2(0) + \int_{-\tau}^{0} k e^{\varepsilon_1 s} \varphi^2(s) ds + \int_{-\xi}^{0} l e^{\varepsilon_2 s} \left(\frac{d}{ds} \varphi(s) \right)^2 ds,$$

$$l = 1, \quad h = a_0, \quad k = \frac{|b|^2 e^{\varepsilon_1 \tau}}{(1 - |c|^2 e^{\varepsilon_2 \xi})},$$

величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ *определяются из неравенств*

$$1 - |c|^2 e^{\varepsilon_2 \xi} > 0, \quad (a_0)^2 - \frac{|b|^2 e^{\varepsilon_1 \tau}}{(1 - |c|^2 e^{\varepsilon_2 \xi})} > 0,$$

величина γ *определяется по формуле*

$$\gamma = \min \left\{ \frac{1}{a_0} \left((a_0)^2 - \frac{|b|^2 e^{\varepsilon_1 \tau}}{(1 - |c|^2 e^{\varepsilon_2 \xi})} \right), \varepsilon_1, \varepsilon_2 \right\} > 0.$$

Теперь рассмотрим начальную задачу для системы (2.9):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} y_1(t) = -a_1^0 y_1(t) + b_{12} y_2(t - \tau_{12}), \quad t > 0, \\[2ex] \dfrac{d}{dt} y_2(t) = -a_2^0 y_2(t) + c_{21} \dfrac{d}{dt} y_1(t - \xi_{21}), \quad t > 0, \\[2ex] y_1(t) = \varphi_1(t), \quad y_2(t) = \varphi_2(t), \quad t \in [-\max\{\tau_{12}, \xi_{21}\}, 0], \\[2ex] y_1(+0) = \varphi_1(0), \quad y_2(+0) = \varphi_2(0), \end{cases} \tag{2.21}$$

где $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t) \in C^1([-\max\{\tau_{12}, \xi_{21}\}, 0])$ — заданные функции, удовлетворяющие системе (2.9) при $t = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} \varphi_1(0) = -a_1^0 \varphi_1(0) + b_{12} \varphi_2(-\tau_{12}), \\[2ex] \dfrac{d}{dt} \varphi_2(0) = -a_2^0 \varphi_2(0) + c_{21} \dfrac{d}{dt} \varphi_1(-\xi_{21}). \end{cases}$$

Следствие 5. *Предположим, что выполнены условия* (2.10). *Тогда для решения начальной задачи* (2.21) *имеют место оценки*

$$|y_i(t)| \le \sqrt{\frac{V(0, \varphi)}{h_i}} e^{-\gamma t/2}, \quad i = 1, 2, \quad t > 0,$$

где

$$V(0, \varphi) = V(0, \varphi_1, \varphi_2) = h_1 \varphi_1^2(0) + h_2 \varphi_2^2(0)$$
$$+ \int_{-\tau_{12}}^{0} k_{12} e^{\varepsilon_1 s} \varphi_2^2(s) ds + \int_{-\xi_{21}}^{0} l_{21} e^{\varepsilon_2 s} \left(\frac{d}{ds} \varphi_1(s) \right)^2 ds,$$

$$h_1 = (l_{11} + l_{21}) a_1^0, \quad h_2 = (l_{12} + l_{22}) a_2^0, \quad k_{12} = (l_{11} + l_{21}) |b_{12}|^2 e^{\varepsilon_1 \tau_{12}},$$

величины $l_{11}, l_{12}, l_{21}, l_{22} > 0$ *и* $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ *определяются из неравенств*

$$\frac{(a_2^0)^2}{|b_{12}|^2} e^{-\varepsilon_1 \tau_{12}} > \frac{(l_{11} + l_{21})}{(l_{12} + l_{22})} > \frac{l_{21}}{(l_{12} + l_{22})} > |c_{21}|^2 e^{\varepsilon_2 \xi_{21}},$$

величина γ *определяется по формуле*

$$\gamma = \min \left\{ a_1^0, a_2^0 \left(1 - \frac{(l_{11} + l_{21})}{(l_{12} + l_{22})} \frac{|b_{12}|^2}{(a_2^0)^2} e^{\varepsilon_1 \tau_{12}} \right), \varepsilon_1, \varepsilon_2 \right\} > 0.$$

Доказательство следствий 4 и 5 вытекает из теоремы 2.

Замечание 3. Как было отмечено в начале параграфа, условие

$$\det(A_0 - A - B) \neq 0$$

гарантирует существование единственного стационарного решения системы (1.1) в линейном случае. Нетрудно заметить, что при выполнении условий теоремы 1 это неравенство выполнено автоматически. Действительно, пусть величины a_i^0, a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, $i, j = 1, \dots, n$, удовлетворяют условиям (2.3)–(2.5). Рассмотрим систему вида (2.1), в которой $c_{ij} = 0$, $\tau_{ij} = 0$, $i, j = 1, \dots, n$:

$$\frac{d}{dt} y_i(t) = -a_i^0 y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad t > 0,$$

или

$$\frac{d}{dt} y(t) = (-A_0 + A + B) y(t), \quad t > 0.$$

По теореме 1 нулевое решение этой системы экспоненциально устойчиво. Это означает, что все собственные значения матрицы $(-A_0 + A + B)$ имеют отрицательную вещественную часть, а следовательно, $\det(A_0 - A - B) \neq 0$, что и требовалось доказать.

Наконец, перейдем к доказательству основных результатов настоящей статьи – теоремы 1 и теоремы 2.

§ 3. Доказательство теорем 1 и 2

Поскольку теорема 1 следует из теоремы 2, то достаточно доказать только вторую теорему.

Пусть $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ — решение начальной задачи (2.2). Рассмотрим функционал Ляпунова – Красовского (2.15) на решении $y(t)$. Посчитаем производную:

$$\frac{d}{dt} V(t, y) = \sum_{i=1}^{n} 2 h_i y_i(t) \frac{d}{dt} y_i(t) + \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} y_j^2(t)$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} e^{-\varepsilon_1^{ij}\tau_{ij}} y_j^2(t-\tau_{ij}) - \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_1^{ij} \int\limits_{t-\tau_{ij}}^{t} k_{ij} e^{-\varepsilon_1^{ij}(t-s)} y_j^2(s)ds$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n} l_{ij} \left(\frac{d}{dt} y_j(t)\right)^2 - \sum_{i,j=1}^{n} l_{ij} e^{-\varepsilon_2^{ij}\xi_{ij}} \left(\frac{d}{dt} y_j(t-\xi_{ij})\right)^2$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_2^{ij} \int\limits_{t-\xi_{ij}}^{t} l_{ij} e^{-\varepsilon_2^{ij}(t-s)} \left(\frac{d}{ds} y_j(s)\right)^2 ds.$$

Введем обозначения

$$J_{quad} = \sum_{i=1}^{n} 2h_i y_i(t) \frac{d}{dt} y_i(t) + \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} y_j^2(t) - \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} e^{-\varepsilon_1^{ij}\tau_{ij}} y_j^2(t-\tau_{ij})$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n} l_{ij} \left(\frac{d}{dt} y_j(t)\right)^2 - \sum_{i,j=1}^{n} l_{ij} e^{-\varepsilon_2^{ij}\xi_{ij}} \left(\frac{d}{dt} y_j(t-\xi_{ij})\right)^2, \tag{3.1}$$

$$J_{int} = -\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_1^{ij} \int\limits_{t-\tau_{ij}}^{t} k_{ij} e^{-\varepsilon_1^{ij}(t-s)} y_j^2(s)ds$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_2^{ij} \int\limits_{t-\xi_{ij}}^{t} l_{ij} e^{-\varepsilon_2^{ij}(t-s)} \left(\frac{d}{ds} y_j(s)\right)^2 ds. \tag{3.2}$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} V(t,y) = J_{quad} + J_{int}. \tag{3.3}$$

Преобразуем J_{quad} из (3.1). Поскольку $y(t)$ — решение системы (2.1), то

$$J_{quad} = \sum_{i=1}^{n} 2h_i y_i(t) \Bigg(-a_i^0 y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j(t)$$

$$+\sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j(t-\tau_{ij}) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \frac{d}{dt} y_j(t-\xi_{ij}) \Bigg)$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} y_j^2(t) - \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} e^{-\varepsilon_1^{ij}\tau_{ij}} y_j^2(t-\tau_{ij}) - \sum_{i,j=1}^{n} l_{ij} e^{-\varepsilon_2^{ij}\xi_{ij}} \left(\frac{d}{dt} y_j(t-\xi_{ij})\right)^2$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n} l_{ij} \left(-a_j^0 y_j(t) + \sum_{q=1}^{n} a_{jq} y_q(t) + \sum_{q=1}^{n} b_{jq} y_q(t-\tau_{jq}) + \sum_{q=1}^{n} c_{jq} \frac{d}{dt} y_q(t-\xi_{jq}) \right)$$

$$\times\left(-a_j^0y_j(t)+\sum_{r=1}^n a_{jr}y_r(t)+\sum_{r=1}^n b_{jr}y_r(t-\tau_{jr})+\sum_{r=1}^n c_{jr}\frac{d}{dt}y_r(t-\xi_{jr})\right).$$

Раскрывая скобки, переобозначая индексы суммирования и приводя подобные слагаемые, перепишем это выражение в следующем виде:

$$\begin{aligned}
J_{quad}=&-\sum_{j=1}^n\left(2h_ja_j^0-\sum_{i=1}^n k_{ij}-\sum_{i=1}^n l_{ij}(a_j^0)^2\right)y_j^2(t)\\
&+\sum_{j,q=1}^n 2\left(h_j-\sum_{i=1}^n l_{ij}a_j^0\right)a_{jq}y_j(t)y_q(t)\\
&+\sum_{j,q=1}^n 2\left(h_j-\sum_{i=1}^n l_{ij}a_j^0\right)b_{jq}y_j(t)y_q(t-\tau_{jq})\\
&+\sum_{j,q=1}^n 2\left(h_j-\sum_{i=1}^n l_{ij}a_j^0\right)c_{jq}y_j(t)\left(\frac{d}{dt}y_q(t-\xi_{jq})\right)\\
&-\sum_{i,j=1}^n k_{ij}e^{-\varepsilon_1^{ij}\tau_{ij}}y_j^2(t-\tau_{ij})-\sum_{i,j=1}^n l_{ij}e^{-\varepsilon_2^{ij}\xi_{ij}}\left(\frac{d}{dt}y_j(t-\xi_{ij})\right)^2\\
&+\sum_{i,j,q,r=1}^n l_{ij}a_{jq}a_{jr}y_q(t)y_r(t)+\sum_{i,j,q,r=1}^n l_{ij}b_{jq}b_{jr}y_q(t-\tau_{jq})y_r(t-\tau_{jr})\\
&+\sum_{i,j,q,r=1}^n 2l_{ij}a_{jq}b_{jr}y_q(t)y_r(t-\tau_{jr})+\sum_{i,j,q,r=1}^n 2l_{ij}a_{jq}c_{jr}y_q(t)\left(\frac{d}{dt}y_r(t-\xi_{jr})\right)\\
&+\sum_{i,j,q,r=1}^n 2l_{ij}b_{jq}c_{jr}y_q(t-\tau_{jq})\left(\frac{d}{dt}y_r(t-\xi_{jr})\right)\\
&+\sum_{i,j,q,r=1}^n l_{ij}c_{jq}c_{jr}\left(\frac{d}{dt}y_q(t-\xi_{jq})\right)\left(\frac{d}{dt}y_r(t-\xi_{jr})\right).
\end{aligned}$$

Учитывая обозначения (2.16) для величин h_j, $j=1,\dots,n$, получим

$$\begin{aligned}
J_{quad}=&-\sum_{i,j=1}^n\left(l_{ij}(a_j^0)^2-k_{ij}\right)y_j^2(t)-\sum_{i,j=1}^n k_{ij}e^{-\varepsilon_1^{ij}\tau_{ij}}y_j^2(t-\tau_{ij})\\
&-\sum_{i,j=1}^n l_{ij}e^{-\varepsilon_2^{ij}\xi_{ij}}\left(\frac{d}{dt}y_j(t-\xi_{ij})\right)^2+\sum_{m=1}^6 J_m,
\end{aligned}\tag{3.4}$$

где

$$J_1 = \sum_{i,j,q,r=1}^{n} l_{ij} a_{jq} a_{jr} y_q(t) y_r(t),$$

$$J_2 = \sum_{i,j,q,r=1}^{n} l_{ij} b_{jq} b_{jr} y_q(t-\tau_{jq}) y_r(t-\tau_{jr}),$$

$$J_3 = \sum_{i,j,q,r=1}^{n} 2 l_{ij} a_{jq} b_{jr} y_q(t) y_r(t-\tau_{jr}),$$

$$J_4 = \sum_{i,j,q,r=1}^{n} 2 l_{ij} a_{jq} c_{jr} y_q(t) \left(\frac{d}{dt} y_r(t-\xi_{jr})\right),$$

$$J_5 = \sum_{i,j,q,r=1}^{n} 2 l_{ij} b_{jq} c_{jr} y_q(t-\tau_{jq}) \left(\frac{d}{dt} y_r(t-\xi_{jr})\right),$$

$$J_6 = \sum_{i,j,q,r=1}^{n} l_{ij} c_{jq} c_{jr} \left(\frac{d}{dt} y_q(t-\xi_{jq})\right) \left(\frac{d}{dt} y_r(t-\xi_{jr})\right).$$

Оценим каждую сумму J_m, $m = 1, \dots, 6$, по отдельности. Ниже будут использоваться неравенства вида

$$2\alpha\beta \le \gamma\alpha^2 + \frac{\beta^2}{\gamma}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \gamma > 0.$$

Оценим J_1:

$$J_1 \le \sum_{i,j,q,r=1}^{n} \frac{1}{2} l_{ij} |a_{jq}||a_{jr}| \left(y_q^2(t) + y_r^2(t)\right) = \sum_{i,j,q,r=1}^{n} l_{ij} |a_{jr}||a_{jq}| y_q^2(t). \qquad (3.5)$$

Оценим J_2:

$$J_2 \le \sum_{i,j,q,r=1}^{n} \frac{1}{2} l_{ij} |b_{jq}||b_{jr}| \left(\frac{e^{\varepsilon_1^{jr}\tau_{jr}/2}}{e^{\varepsilon_1^{jq}\tau_{jq}/2}} y_q^2(t-\tau_{jq}) + \frac{e^{\varepsilon_1^{jq}\tau_{jq}/2}}{e^{\varepsilon_1^{jr}\tau_{jr}/2}} y_r^2(t-\tau_{jr})\right)$$

$$= \sum_{i,j,q,r=1}^{n} l_{ij} |b_{jr}||b_{jq}| \frac{e^{\varepsilon_1^{jr}\tau_{jr}/2}}{e^{\varepsilon_1^{jq}\tau_{jq}/2}} y_q^2(t-\tau_{jq}). \qquad (3.6)$$

Оценим J_3:

$$J_3 \le \sum_{i,j,q,r=1}^{n} l_{ij} |a_{jq}||b_{jr}| \left(e^{\varepsilon_1^{jr}\tau_{jr}/2} y_q^2(t) + e^{-\varepsilon_1^{jr}\tau_{jr}/2} y_r^2(t-\tau_{jr})\right)$$

$$= \sum_{i,j,q,r=1}^{n} l_{ij}|a_{jq}||b_{jr}|e^{\varepsilon_1^{jr}\tau_{jr}/2}y_q^2(t) + \sum_{i,j,q,r=1}^{n} l_{ij}|a_{jr}||b_{jq}|e^{-\varepsilon_1^{jq}\tau_{jq}/2}y_q^2(t-\tau_{jq}). \quad (3.7)$$

Оценим J_4:

$$J_4 \le \sum_{i,j,q,r=1}^{n} l_{ij}|a_{jq}||c_{jr}| \left(e^{\varepsilon_2^{jr}\xi_{jr}/2}\gamma_{jr}y_q^2(t) + \frac{e^{-\varepsilon_2^{jr}\xi_{jr}/2}}{\gamma_{jr}} \left(\frac{d}{dt}y_r(t-\xi_{jr})\right)^2 \right)$$

$$= \sum_{i,j,q,r=1}^{n} l_{ij}|a_{jq}||c_{jr}|e^{\varepsilon_2^{jr}\xi_{jr}/2}\gamma_{jr}y_q^2(t)$$

$$+ \sum_{i,j,q,r=1}^{n} l_{ij}|a_{jq}||c_{jr}|\frac{e^{-\varepsilon_2^{jr}\xi_{jr}/2}}{\gamma_{jr}} \left(\frac{d}{dt}y_r(t-\xi_{jr})\right)^2. \quad (3.8)$$

Оценим J_5:

$$J_5 \le \sum_{i,j,q,r=1}^{n} l_{ij}|b_{jq}||c_{jr}|$$

$$\times \left(\frac{e^{\varepsilon_2^{jr}\xi_{jr}/2}\gamma_{jr}}{e^{\varepsilon_1^{jq}\tau_{jq}/2}} y_q^2(t-\tau_{jq}) + \frac{e^{\varepsilon_1^{jq}\tau_{jq}/2}}{e^{\varepsilon_2^{jr}\xi_{jr}/2}\gamma_{jr}} \left(\frac{d}{dt}y_r(t-\xi_{jr})\right)^2 \right)$$

$$= \sum_{i,j,q,r=1}^{n} l_{ij}|b_{jq}||c_{jr}|\frac{e^{\varepsilon_2^{jr}\xi_{jr}/2}\gamma_{jr}}{e^{\varepsilon_1^{jq}\tau_{jq}/2}} y_q^2(t-\tau_{jq})$$

$$+ \sum_{i,j,q,r=1}^{n} l_{ij}|b_{jq}||c_{jr}|\frac{e^{\varepsilon_1^{jq}\tau_{jq}/2}}{e^{\varepsilon_2^{jr}\xi_{jr}/2}\gamma_{jr}} \left(\frac{d}{dt}y_r(t-\xi_{jr})\right)^2. \quad (3.9)$$

Оценим J_6:

$$J_6 \le \sum_{i,j,q,r=1}^{n} \frac{1}{2} l_{ij}|c_{jq}||c_{jr}|$$

$$\times \left(\frac{e^{\varepsilon_2^{jr}\xi_{jr}/2}}{e^{\varepsilon_2^{jq}\xi_{jq}/2}} \left(\frac{d}{dt}y_q(t-\xi_{jq})\right)^2 + \frac{e^{\varepsilon_2^{jq}\xi_{jq}/2}}{e^{\varepsilon_2^{jr}\xi_{jr}/2}} \left(\frac{d}{dt}y_r(t-\xi_{jr})\right)^2 \right)$$

$$= \sum_{i,j,q,r=1}^{n} l_{ij}|c_{jq}||c_{jr}|\frac{e^{\varepsilon_2^{jq}\xi_{jq}/2}}{e^{\varepsilon_2^{jr}\xi_{jr}/2}} \left(\frac{d}{dt}y_r(t-\xi_{jr})\right)^2. \quad (3.10)$$

Величины γ_{jr}, $j, r = 1, \ldots, n$, участвующие в оценках (3.8), (3.9), будут определены ниже.

Учитывая неравенства (3.5)–(3.10), переобозначая индексы суммирования и приводя подобные слагаемые, из формулы (3.4) получим оценку

$$J_{quad} \le -\sum_{j,q=1}^{n} \left(l_{jq}(a_q^0)^2 - k_{jq}\right) y_q^2(t)$$

$$-\sum_{j,q=1}^{n} k_{jq} e^{-\varepsilon_1^{jq}\tau_{jq}} y_q^2(t-\tau_{jq}) - \sum_{j,r=1}^{n} l_{jr} e^{-\varepsilon_2^{jr}\xi_{jr}} \left(\frac{d}{dt}y_r(t-\xi_{jr})\right)^2$$

$$+\sum_{i,j,q,r=1}^{n} l_{ij}\left(|a_{jr}| + |b_{jr}|e^{\varepsilon_1^{jr}\tau_{jr}/2} + |c_{jr}|e^{\varepsilon_2^{jr}\xi_{jr}/2}\gamma_{jr}\right)|a_{jq}| y_q^2(t)$$

$$+\sum_{i,j,q,r=1}^{n} l_{ij}\left(|a_{jr}| + |b_{jr}|e^{\varepsilon_1^{jr}\tau_{jr}/2} + |c_{jr}|e^{\varepsilon_2^{jr}\xi_{jr}/2}\gamma_{jr}\right)|b_{jq}| e^{-\varepsilon_1^{jq}\tau_{jq}/2} y_q^2(t-\tau_{jq})$$

$$+\sum_{i,j,q,r=1}^{n} l_{ij}\left(\frac{|a_{jq}| + |b_{jq}|e^{\varepsilon_1^{jq}\tau_{jq}/2}}{\gamma_{jr}} + |c_{jq}|e^{\varepsilon_2^{jq}\xi_{jq}/2}\right)$$

$$\times |c_{jr}| e^{-\varepsilon_2^{jr}\xi_{jr}/2}\left(\frac{d}{dt}y_r(t-\xi_{jr})\right)^2.$$

В силу обозначений (2.13), (2.14) это неравенство можно переписать в виде

$$J_{quad} \le -\sum_{j,q=1}^{n}\left[l_{jq}(a_q^0)^2 - k_{jq} - \left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}\right)\sum_{r=1}^{n}\left(|\widetilde{a}_{jr}| + |\widetilde{c}_{jr}|\gamma_{jr}\right)|a_{jq}|\right] y_q^2(t)$$

$$-\sum_{j,q=1}^{n}\left[k_{jq} - \left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}\right)\sum_{r=1}^{n}\left(|\widetilde{a}_{jr}| + |\widetilde{c}_{jr}|\gamma_{jr}\right)|b_{jq}|e^{\varepsilon_1^{jq}\tau_{jq}/2}\right] e^{-\varepsilon_1^{jq}\tau_{jq}} y_q^2(t-\tau_{jq})$$

$$-\sum_{j,r=1}^{n}\left[l_{jr} - \left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}\right)\left(\sum_{q=1}^{n}|\widetilde{c}_{jq}|\right)|\widetilde{c}_{jr}| - \frac{1}{\gamma_{jr}}\left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}\right)\left(\sum_{q=1}^{n}|\widetilde{a}_{jq}|\right)|\widetilde{c}_{jr}|\right]$$

$$\times e^{-\varepsilon_2^{jr}\xi_{jr}}\left(\frac{d}{dt}y_r(t-\xi_{jr})\right)^2.$$

Полагая

$$\gamma_{jr} = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}\right)\left(\sum\limits_{s=1}^{n}|\widetilde{a}_{js}|\right)|\widetilde{c}_{jr}|}{\left(l_{jr} - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}\right)\left(\sum\limits_{s=1}^{n}|\widetilde{c}_{js}|\right)|\widetilde{c}_{jr}|\right)}, \quad j,r = 1,\dots,n,$$

получим

$$J_{quad} \le -\sum_{j,q=1}^{n} \left[l_{jq}(a_q^0)^2 - k_{jq} - \left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}\right) \left(\sum_{s=1}^{n} |\widetilde{a}_{js}|\right) \right.$$

$$\left. \times \left(1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}\right) |\widetilde{c}_{jr}|^2}{\left(l_{jr} - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}\right)\left(\sum\limits_{s=1}^{n} |\widetilde{c}_{js}|\right) |\widetilde{c}_{jr}|\right)} \right) |a_{jq}| \right] y_q^2(t)$$

$$- \sum_{j,q=1}^{n} \left[k_{jq} - \left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}\right) \left(\sum_{s=1}^{n} |\widetilde{a}_{js}|\right) \right.$$

$$\left. \times \left(1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}\right) |\widetilde{c}_{jr}|^2}{\left(l_{jr} - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}\right)\left(\sum\limits_{s=1}^{n} |\widetilde{c}_{js}|\right) |\widetilde{c}_{jr}|\right)} \right) |b_{jq}| e^{\varepsilon_1^{jq}\tau_{jq}/2} \right] e^{-\varepsilon_1^{jq}\tau_{jq}} y_q^2(t-\tau_{jq}).$$

В силу обозначений (2.17) для величин k_{jq}, $j, q = 1, \dots, n$, и обозначений (2.12) для величин σ_q, $q = 1, \dots, n$, это неравенство переписывается в окончательном виде

$$J_{quad} \le -\sum_{q=1}^{n} \sigma_q y_q^2(t). \tag{3.11}$$

Наконец, учитывая представление (3.3) для производной функционала Ляпунова – Красовского, формулу (3.2) и оценку (3.11), получим неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\sum_{q=1}^{n} \left(\frac{\sigma_q}{h_q}\right) h_q y_q^2(t) - \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_1^{ij} \int\limits_{t-\tau_{ij}}^{t} k_{ij} e^{-\varepsilon_1^{ij}(t-s)} y_j^2(s) ds$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_2^{ij} \int\limits_{t-\xi_{ij}}^{t} l_{ij} e^{-\varepsilon_2^{ij}(t-s)} \left(\frac{d}{ds} y_j(s)\right)^2 ds.$$

Из этого неравенства, в силу определения (2.19) величины γ и определения (2.15) функционала $V(t,y)$ следует оценка

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\gamma V(t,y), \quad t > 0.$$

Отсюда

$$h_i y_i^2(t) \le V(t,y) \le V(0,\varphi) e^{-\gamma t}, \quad i = 1, \dots, n, \quad t > 0,$$

где $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ — начальная вектор-функция, определенная при постановке задачи (2.2).

Теорема 2 доказана.

§ 4. Результаты для нелинейной модели с переменными запаздываниями

В этом параграфе мы рассмотрим систему (1.1). Предположим, что у данной системы существует единственное стационарное решение $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, т. е. нелинейная система алгебраических уравнений

$$0 = -a_i^0 x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} g_j(x_j) + u_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.1}$$

однозначно разрешима. По аналогии с линейным случаем в конце параграфа будут указаны условия на коэффициенты a_i^0, a_{ij}, b_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, и нелинейные функции $f_j(x)$, $g_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$, при которых выполняется это предположение.

Замена

$$y_i(t) = x_i(t) - x_i^*, \quad i = 1, \ldots, n,$$

приводит систему к виду

$$\frac{d}{dt} y_i(t) = -a_i^0 y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Big[f_j(y_j(t) + x_j^*) - f_j(x_j^*) \Big]$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \Big[g_j(y_j(t - \tau_{ij}(t)) + x_j^*) - g_j(x_j^*) \Big]$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \frac{d}{dt} y_j(t - \xi_{ij}(t)), \quad i = 1, \ldots, n, \quad t > 0, \tag{4.2}$$

где функции $f_j(x)$, $g_j(x)$, $\tau_{ij}(t)$, $\xi_{ij}(t)$, $i, j = 1, \ldots, n$, удовлетворяют условиям (1.2)–(1.5). Начальная задача для этой системы будет иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y_i(t) = -a_i^0 y_i(t) + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big[f_j(y_j(t)+x_j^*) - f_j(x_j^*)\Big] \\ \qquad + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Big[g_j(y_j(t-\tau_{ij}(t))+x_j^*) - g_j(x_j^*)\Big] \\ \qquad + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\dfrac{d}{dt}y_j(t-\xi_{ij}(t)), \quad i=1,\dots,n, \quad t>0, \\ y_i(t) = \varphi_i(t), \quad i=1,\dots,n, \quad t\in[-\mathcal{T}_{\max},0], \\ y_i(+0) = \varphi_i(0), \quad i=1,\dots,n, \end{cases} \tag{4.3}$$

где

$$\mathcal{T}_{\max} = \max_{i,j=1,\dots,n}\{\tau_{ij},\xi_{ij}\},$$

величины τ_{ij}, ξ_{ij}, $i,j=1,\dots,n$, определены в (1.2), (1.3), а заданные функции $\varphi_i(t)\in C^1([-\mathcal{T}_{\max},0])$, $i=1,\dots,n$, удовлетворяют системе (4.2) при $t=0$:

$$\frac{d}{dt}\varphi_i(0) = -a_i^0\varphi_i(0) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big[f_j(\varphi_j(0)+x_j^*) - f_j(x_j^*)\Big]$$

$$+\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Big[g_j(\varphi_j(-\tau_{ij}(0))+x_j^*) - g_j(x_j^*)\Big]$$

$$+\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\frac{d}{dt}\varphi_j(-\xi_{ij}(0)), \quad i=1,\dots,n.$$

В случае, когда $\min\limits_{i,j=1,\dots,n}\min\limits_{t\ge 0}\xi_{ij}(t)>0$, последнее условие гарантирует непрерывную дифференцируемость решения при $t>0$: $y_i(t)\in C^1([0,\infty))$, $i=1,\dots,n$. Будем предполагать, что данное условие выполняется.

По аналогии с теоремами 1 и 2 сформулируем результаты об экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (4.2) и об оценках решений начальной задачи (4.3).

Теорема 3. *Предположим, что*

$$a_i^0>0, \quad i=1,\dots,n,$$

и существуют величины $l_{ij} > 0$, $i, j = 1, \dots, n$, такие, что выполнены неравенства

$$l_{jr} - \left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}\right) \left(\sum_{s=1}^{n} \frac{|c_{js}|}{(1-\bar{\xi}_{js})^{\frac{1}{2}}}\right) \frac{|c_{jr}|}{(1-\bar{\xi}_{jr})^{\frac{1}{2}}} > 0, \quad j, r = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \Bigg[l_{jq}(a_q^0)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}\right) \sum_{s=1}^{n} \left(|a_{js}|\mu_s + \frac{|b_{js}|\nu_s}{(1-\bar{\tau}_{js})^{\frac{1}{2}}}\right) \left(|a_{jq}|\mu_q + \frac{|b_{jq}|\nu_q}{(1-\bar{\tau}_{jq})^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$\times \left(1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}\right) \frac{|c_{jr}|^2}{(1-\bar{\xi}_{jr})}}{\left(l_{jr} - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}\right) \left(\sum\limits_{s=1}^{n} \frac{|c_{js}|}{(1-\bar{\xi}_{js})^{\frac{1}{2}}}\right) \frac{|c_{jr}|}{(1-\bar{\xi}_{jr})^{\frac{1}{2}}}\right)}\right) \Bigg] > 0, \quad q = 1, \dots, n,$$

где μ_j, ν_j, $\bar{\tau}_{ij}$, $\bar{\xi}_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$, определены в (1.2)–(1.5). *Тогда нулевое решение системы* (4.2) *экспоненциально устойчиво.*

Введем обозначения. Предположим, что выполнены условия теоремы 3. Выберем величины $\varepsilon_1^{ij}, \varepsilon_2^{ij} > 0$, $i, j = 1, \dots, n$, так, чтобы выполнялись неравенства

$$l_{jr} - \left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}\right) \left(\sum_{s=1}^{n} |\widetilde{c}_{js}|\right) |\widetilde{c}_{jr}| > 0, \quad j, r = 1, \dots, n, \tag{4.4}$$

$$\sigma_q = \sum_{j=1}^{n} \Bigg[l_{jq}(a_q^0)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}\right) \left(\sum_{s=1}^{n} |\widetilde{a}_{js}|\right) |\widetilde{a}_{jq}|$$

$$\times \left(1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}\right) |\widetilde{c}_{jr}|^2}{\left(l_{jr} - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}\right) \left(\sum\limits_{s=1}^{n} |\widetilde{c}_{js}|\right) |\widetilde{c}_{jr}|\right)}\right) \Bigg] > 0, \quad q = 1, \dots, n, \tag{4.5}$$

где

$$|\widetilde{a}_{jr}| = |a_{jr}|\mu_r + \frac{|b_{jr}|\nu_r}{(1-\bar{\tau}_{jr})^{\frac{1}{2}}} e^{\varepsilon_1^{jr}\tau_{jr}/2}, \quad j, r = 1, \dots, n, \tag{4.6}$$

$$|\widetilde{c}_{jr}| = \frac{|c_{jr}|}{(1-\bar{\xi}_{jr})^{\frac{1}{2}}} e^{\varepsilon_2^{jr}\xi_{jr}/2}, \quad j, r = 1, \dots, n. \tag{4.7}$$

Рассмотрим функционал Ляпунова – Красовского вида (2.15)

$$V(t, y) = V(t, y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} h_i y_i^2(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{t-\tau_{ij}(t)}^{t} k_{ij} e^{-\varepsilon_1^{ij}(t-s)} y_j^2(s) ds$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{t-\xi_{ij}(t)}^{t} l_{ij}e^{-\varepsilon_2^{ij}(t-s)}\left(\frac{d}{ds}y_j(s)\right)^2 ds, \tag{4.8}$$

где

$$h_j=\sum_{i=1}^{n} l_{ij}a_j^0>0, \quad j=1,\dots,n, \tag{4.9}$$

$$k_{jq}=\left(\sum_{i=1}^{n} l_{ij}\right)\left(\sum_{s=1}^{n}|\widetilde{a}_{js}|\right)\left(1+\sum_{r=1}^{n}\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}\right)|\widetilde{c}_{jr}|^2}{\left(l_{jr}-\left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_{ij}\right)\left(\sum\limits_{s=1}^{n}|\widetilde{c}_{js}|\right)|\widetilde{c}_{jr}|\right)}\right)$$

$$\times\frac{|b_{jq}|\nu_q}{(1-\bar{\tau}_{jq})^{\frac{1}{2}}}e^{\varepsilon_1^{jq}\tau_{jq}/2}\geq 0, \quad j,q=1,\dots,n,$$

$l_{ij}>0$, $i,j=1,\dots,n$, определены в теореме 3.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Предположим, что выполнены условия теоремы 3. Тогда для решения начальной задачи* (4.3) *справедливы оценки*

$$|y_i(t)|\leq\sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_i}}e^{-\gamma t/2}, \quad i=1,\dots,n, \quad t>0,$$

где

$$\gamma=\min_{i,j=1,\dots,n}\left\{\frac{\sigma_i}{h_i},\varepsilon_1^{ij},\varepsilon_2^{ij}\right\}>0,$$

функционал $V(0,\varphi)$ *определен в* (4.8), *величины* h_i *определены в* (4.9), *величины* σ_i, ε_1^{ij} *и* ε_2^{ij} *— в* (4.4)–(4.7).

Теоремы 3 и 4 доказываются по аналогии с доказательством теорем 1 и 2.

В заключении параграфа рассмотрим вопрос о существовании и единственности стационарного решения системы (1.1), т. е. решения нелинейной системы алгебраических уравнений (4.1). Имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть величины* a_i^0, a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, μ_j, ν_j, $\bar{\tau}_{ij}$, $\bar{\xi}_{ij}$, $i,j=1,\dots,n$, *удовлетворяют условиям теоремы 3. Тогда существует единственное стационарное решение системы* (1.1).

Доказательство. Покажем, что при выполнении условий теоремы 3 система (4.1) однозначно разрешима. Рассмотрим линейную систему вида (4.2), в которой $c_{ij}=0$, $\tau_{ij}(t)\equiv 0$, $\xi_{ij}(t)\equiv\xi_{ij}$, $i,j=1,\dots,n$:

$$\frac{d}{dt}y_i(t)=-a_i^0y_i(t)+\varepsilon\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\mu_jy_j(t)$$

$$+\varepsilon\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|\nu_j y_j(t), \quad i=1,\dots,n, \quad t>0,$$

или

$$\frac{d}{dt}y(t)=(-A_0+\varepsilon S)y(t), \quad t>0,$$

где $\varepsilon\in[0,1]$,

$$S=\begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ s_{n1} & \dots & s_{nn}\end{pmatrix}, \quad s_{ij}=|a_{ij}|\mu_j+|b_{ij}|\nu_j, \quad i,j=1,\dots,n.$$

По теореме 3 нулевое решение этой системы экспоненциально устойчиво, т. е. при любом $\varepsilon\in[0,1]$ все собственные значения матрицы $(-A_0+\varepsilon S)$ имеют отрицательную вещественную часть. В частности, отсюда следует, что

$$\det(A_0-\varepsilon S)\neq 0, \quad \varepsilon\in[0,1]. \tag{4.10}$$

Будем искать решение системы (4.1) методом последовательных приближений. Выберем начальное приближение $x^{[0]}=(x_1^{[0]},\dots,x_n^{[0]})$ как решение системы

$$a_i^0x_i^{[0]}-\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\mu_jx_j^{[0]}-\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|\nu_jx_j^{[0]}=u_i, \quad i=1,\dots,n.$$

Рассмотрим последовательность $\{x^{[k]}\}_{k\in\mathbb{N}}$, где вектора $x^{[k]}=(x_1^{[k]},\dots,x_n^{[k]})$ определяются по следующему правилу:

$$x_i^{[k]}=\sum_{j=1}^{n}(a_i^0)^{-1}a_{ij}f_j(x_j^{[k-1]})+\sum_{j=1}^{n}(a_i^0)^{-1}b_{ij}g_j(x_j^{[k-1]})+(a_i^0)^{-1}u_i, \quad i=1,\dots,n.$$

Если существует предел

$$\lim_{k\to\infty}x^{[k]}=x^*,$$

то x^* будет решением системы (4.1).

Докажем, что этот предел существует. Поскольку имеет место представление

$$x^{[k]}=x^{[0]}+\sum_{m=1}^{k}\left(x^{[m]}-x^{[m-1]}\right),$$

то достаточно доказать, что ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(x^{[m]}-x^{[m-1]}\right)$ сходится. По определению

$$x_i^{[m]}-x_i^{[m-1]}=\sum_{j=1}^{n}(a_i^0)^{-1}a_{ij}\Big(f_j(x_j^{[m-1]})-f_j(x_j^{[m-2]})\Big)$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(a_i^0)^{-1}b_{ij}\Big(g_j(x_j^{[m-1]})-g_j(x_j^{[m-2]})\Big),\quad i=1,\ldots,n.$$

В силу неравенств (1.4), (1.5) отсюда получим оценку

$$|x_i^{[m]}-x_i^{[m-1]}|\le\sum_{j=1}^{n}(a_i^0)^{-1}|a_{ij}|\mu_j|x_j^{[m-1]}-x_j^{[m-2]}|$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(a_i^0)^{-1}|b_{ij}|\nu_j|x_j^{[m-1]}-x_j^{[m-2]}|,\quad i=1,\ldots,n.$$

Введем обозначение

$$v^{[m]}=\begin{pmatrix}v_1^{[m]}\\ \vdots\\ v_n^{[m]}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|x_1^{[m]}-x_1^{[m-1]}|\\ \vdots\\ |x_n^{[m]}-x_n^{[m-1]}|\end{pmatrix}.$$

Тогда эту оценку можно переписать в виде

$$v^{[m]}\le A_0^{-1}Sv^{[m-1]},$$

где неравенство понимается покомпонентно. Отсюда нетрудно получить

$$v^{[m]}\le (A_0^{-1}S)^{m-1}v^{[1]}.$$

Теперь для сходимости ряда достаточно доказать, что все собственные значения матрицы $A_0^{-1}S$ содержатся в единичном круге $\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|<1\}$. Действительно, для матриц с неотрицательными элементами справедливо следующее утверждение (см. [25], стр. 365): существует собственное число $\lambda^*\ge 0$ такое, что для всех остальных собственных чисел λ_j, $j=1,\ldots,n$, выполняется $|\lambda_j|\le\lambda^*$. Осталось убедиться в том, что для собственного числа $\lambda^*\ge 0$ матрицы $A_0^{-1}S$ справедливо неравенство $\lambda^*<1$. По определению собственного числа имеем $\det(A_0^{-1}S-\lambda^*E)=0$. Это эквивалентно тому, что

$$\det\left(A_0-\frac{1}{\lambda^*}S\right)=0.$$

В силу (4.10) получим, что $\lambda^*<1$. Итак, последовательность $\{x^{[k]}\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится, а значит, существует решение системы (4.1).

Докажем единственность. Предположим, что система (4.1) имеет два решения $x^*=(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ и $x^{**}=(x_1^{**},\ldots,x_n^{**})$:

$$x_i^*=\sum_{j=1}^{n}(a_i^0)^{-1}a_{ij}f_j(x_j^*)+\sum_{j=1}^{n}(a_i^0)^{-1}b_{ij}g_j(x_j^*)+(a_i^0)^{-1}u_i,\quad i=1,\ldots,n,$$

$$x_i^{**} = \sum_{j=1}^{n} (a_i^0)^{-1} a_{ij} f_j(x_j^{**}) + \sum_{j=1}^{n} (a_i^0)^{-1} b_{ij} g_j(x_j^{**}) + (a_i^0)^{-1} u_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

В силу неравенств (1.4), (1.5) получим

$$|x_i^* - x_i^{**}| \le \sum_{j=1}^{n} (a_i^0)^{-1} |a_{ij}| \mu_j |x_j^* - x_j^{**}|$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} (a_i^0)^{-1} |b_{ij}| \nu_j |x_j^* - x_j^{**}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Учитывая обозначение

$$v^* = \begin{pmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x_1^* - x_1^{**}| \\ \vdots \\ |x_n^* - x_n^{**}| \end{pmatrix},$$

это неравенство можно переписать в виде

$$v^* \le A_0^{-1} S v^*.$$

Отсюда $v^* \le (A_0^{-1} S)^k v^*$ для произвольного $k \in \mathbb{N}$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ и учитывая, что все собственные значения матрицы $A_0^{-1} S$ содержатся в единичном круге, получим $v^* \le 0$. Следовательно, $x^* = x^{**}$. Единственность доказана.

Тем самым, при выполнении условий теоремы 3 у системы (1.1) существует единственное стационарное решение.

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность д.ф.-м.н. Г.В. Демиденко, д.ф.-м.н. И.И. Матвеевой и к.ф.-м.н. Т.К. Искакову за внимание к работе.

Список литературы

1. *Wan L., Zhou Q., Fu H., Zhang Q.* Exponential stability of Hopfield neural networks of neutral type with multiple time-varying delays // *AIMS Mathematics.* 2021. V. 6, N 8. P. 8030–8043.

2. *Hopfield J. J.* Neural networks and physical systems with emergent collect computational abilities // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA.* 1982. V. 79. P. 2254–2558.

3. *Hopfield J. J.* Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA.* 1984. V. 81. P. 3088–3092.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 3, С. 95-124
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 3, P. 95-124

4. *Arik S.* An analysis of stability of neutral-type neural systems with constant time delays // *Journal of the Franklin Institute.* 2014. V. 351. P. 4949–4959.

5. *Shi K. B., Zhu H., Zhong S. M., Zeng Y., Zhang Y. P.* New stability analysis for neutral type neural networks with discrete and distributed delays using a multiple integral approach // *Journal of the Franklin Institute.* 2015. V. 352. P. 155–176.

6. *Faydasicok O.* A new Lyapunov functional for stability analysis of neutral-type Hopfield neural networks with multiple delays // *Neural Networks.* 2020. V. 129. P. 288–297.

7. *Berezansky L., Diblík J., Svoboda Z., Šmarda Z.* Exponential stability criteria for linear neutral systems with applications to neural networks of neutral type // *Journal of the Franklin Institute.* 2023. V. 360. P. 301–326.

8. *Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения.* М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1959.

9. *Kharitonov V. L., Hinrichsen D.* Exponential estimates for time delay systems // *Systems and Control Letters.* 2004. V. 53, N 5. P. 395–405.

10. *Mondié S., Kharitonov V. L.* Exponential estimates for retarded time-delay systems: LMI approach // *IEEE Transactions on Automatic Control.* 2005. V. 50, N 2. P. 268–273.

11. *Хусаинов Д. Я., Иванов А. Ф., Кожаметов А. Т.* Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием // *Дифференциальные уравнения.* 2005. Т. 41, № 8. С. 1137–1140.

12. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // *Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика.* 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.

13. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // *Сибирский математический журнал.* 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.

14. *Ыскак Т. (Искаков Т. К.).* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздыванием // *Математические труды.* 2023. Т. 26, № 1. С. 208–218.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 3, С. 95-124
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 3, P. 95-124

15. *Kharitonov V., Mondié S., Collado J.* Exponential estimates for neutral time-delay systems: an LMI approach // *IEEE Transactions on Automatic Control.* 2005. V. 50, N 5. P. 666–670.

16. *Хусаинов Д. Я., Кожаметов А. Т.* Сходимость решений неавтономных систем нейтрального типа // *Известия вузов. Математика.* 2006. № 1. С. 68–72.

17. *Demidenko G. V.* Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // *Journal of Analysis and Applications.* 2009. V. 7, N 3. P. 119–130.

18. *Kharitonov V. L. Time-Delay Systems. Lyapunov Functionals and Matrices.* New York: Birkhäuser/Springer, 2013.

19. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // *Сибирский математический журнал.* 2014. Т. 55, № 5. С. 1059–1077.

20. *Матвеева И. И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // *Сибирский математический журнал.* 2017. Т. 58, № 2. С. 344–352.

21. *Матвеева И. И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа с несколькими запаздываниями // *Дифференциальные уравнения.* 2017. Т. 53, № 6. С. 730–740.

22. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И., Скворцова М. А.* Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах // *Сибирский математический журнал.* 2019. Т. 60, № 5. С. 1063–1079.

23. *Матвеева И. И.* Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с неограниченным запаздыванием // *Сибирский математический журнал.* 2021. Т. 62, № 3. С. 579–594.

24. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* The second Lyapunov method for time-delay systems // *Functional Differential Equations and Applications* (Editors: Domoshnitsky A., Rasin A., Padhi S.). Series: Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Singapore: Springer Nature, 2021. V. 379. P. 145–167.

25. *Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.* М.: Наука, 1966.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 3, С. 95-124
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 3, P. 95-124

References

1. *Wan L., Zhou Q., Fu H., Zhang Q.* Exponential stability of Hopfield neural networks of neutral type with multiple time-varying delays // *AIMS Mathematics.* 2021. V. 6, N 8. P. 8030–8043.

2. *Hopfield J. J.* Neural networks and physical systems with emergent collect computational abilities // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA.* 1982. V. 79. P. 2254–2558.

3. *Hopfield J. J.* Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA.* 1984. V. 81. P. 3088–3092.

4. *Arik S.* An analysis of stability of neutral-type neural systems with constant time delays // *Journal of the Franklin Institute.* 2014. V. 351. P. 4949–4959.

5. *Shi K. B., Zhu H., Zhong S. M., Zeng Y., Zhang Y. P.* New stability analysis for neutral type neural networks with discrete and distributed delays using a multiple integral approach // *Journal of the Franklin Institute.* 2015. V. 352. P. 155–176.

6. *Faydasicok O.* A new Lyapunov functional for stability analysis of neutral-type Hopfield neural networks with multiple delays // *Neural Networks.* 2020. V. 129. P. 288–297.

7. *Berezansky L., Diblík J., Svoboda Z., Šmarda Z.* Exponential stability criteria for linear neutral systems with applications to neural networks of neutral type // *Journal of the Franklin Institute.* 2023. V. 360. P. 301–326.

8. *Krasovskii N. N. Stability of Motion. Applications of Lyapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay.* Stanford: Stanford University Press, 1963.

9. *Kharitonov V. L., Hinrichsen D.* Exponential estimates for time delay systems // *Systems and Control Letters.* 2004. V. 53, N 5. P. 395–405.

10. *Mondié S., Kharitonov V. L.* Exponential estimates for retarded time-delay systems: LMI approach // *IEEE Transactions on Automatic Control.* 2005. V. 50, N 2. P. 268–273.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 3, С. 95-124
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 3, P. 95-124

11. *Khusainov D. Ya., Ivanov A. F., Kozhametov A. T.* Convergence estimates for solutions of linear stationary systems of differential-difference equations with constant delay // *Differential Equations.* 2005. V. 41, N 8. P. 1196–1200.

12. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* Asymptotic properties of solutions to delay differential equations // *Vestnik Novosibirsk Univ. Ser. Mat. Mekh. Inform.* 2005. V. 5, N 3. P. 20–28 (Russian).

13. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms // *Siberian Mathematical Journal.* 2007. V. 48, N 5. P. 824–836.

14. *Yskak T. (Iskakov T. K.).* Stability of solutions of delay differential equations // *Siberian Advances in Mathematics.* 2023. V. 33, N 3. P. 253–260.

15. *Kharitonov V., Mondié S., Collado J.* Exponential estimates for neutral time-delay systems: an LMI approach // *IEEE Transactions on Automatic Control.* 2005. V. 50, N 5. P. 666–670.

16. *Khusainov D. Ya., Kozhametov A. T.* Convergence of solutions of nonautonomous systems of neutral type // *Russian Mathematics.* 2006. V. 50, N 1. P. 65–69.

17. *Demidenko G. V.* Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // *Journal of Analysis and Applications.* 2009. V. 7, N 3. P. 119–130.

18. *Kharitonov V. L. Time-Delay Systems. Lyapunov Functionals and Matrices.* New York: Birkhäuser/Springer, 2013.

19. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* On estimates of solutions to systems of differential equations of neutral type with periodic coefficients // *Siberian Mathematical Journal.* 2014. V. 55, N 5. P. 866–881.

20. *Matveeva I. I.* On exponential stability of solutions to periodic neutral-type systems // *Siberian Mathematical Journal.* 2017. V. 58, N 2. P. 264–270.

21. *Matveeva I. I.* On the exponential stability of solutions of periodic systems of the neutral type with several delays // *Differential Equations.* 2017. V. 53, N 6. P. 725–735.

22. *Demidenko G. V., Matveeva I. I., Skvortsova M. A.* Estimates for solutions to neutral differential equations with periodic coefficients of linear terms // *Siberian Mathematical Journal.* 2019. V. 60, N 5. P. 828–841.

23. *Matveeva I. I.* Estimates for solutions to a class of nonautonomous systems of neutral type with unbounded delay // *Siberian Mathematical Journal.* 2021. V. 62, N 3. P. 468–481.

24. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* The second Lyapunov method for time-delay systems // *Functional Differential Equations and Applications* (Editors: Domoshnitsky A., Rasin A., Padhi S.). Series: Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Singapore: Springer Nature, 2021. V. 379. P. 145–167.

25. *Gantmacher F. R. The Theory of Matrices.* Vol. 1, 2. Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, 1998.

Информация об авторе

Мария Александровна Скворцова, кандидат физико-математических наук

SPIN 2530-0291 AuthorID: 672082

Scopus Author ID 55355493300

Author Information

Maria A. Skvortsova, Candidate of Mathematics

SPIN 2530-0291 AuthorID: 672082

Scopus Author ID 55355493300

Статья поступила в редакцию 10.07.2025;
одобрена после рецензирования 14.09.2025; принята к публикации 24.09.2025

The article was submitted 10.07.2025;
approved after reviewing 14.09.2025; accepted for publication 24.09.2025